

В задаче не требуется оценка погрешностей!

Внимание! Не направляйте свет стробоскопа в глаза!

Часть 1. Теоретическое введение

Рассмотрим натянутую резинку с жестко закрепленными концами. Сила натяжения резинки в этом положении — T , длина — L .

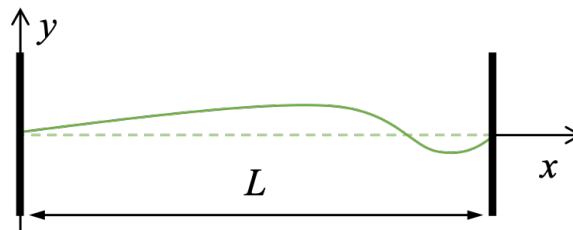


Рис. 1. Колебания резинки с закрепленными концами

Резинку отклонили в перпендикулярном направлении (см. рисунок 1). Рассмотрим ее маленький участок, отстоящий от начального положения на величину y .

1. Считая, что отклонение мало, запишите уравнение движения этого участка и приведите его к виду (здесь точка — производная по времени, штрих — по координате x):

$$\ddot{y} = v^2 y''.$$
 (1)

При каких условиях это можно сделать? Выразите коэффициент v через параметры резинки и силу натяжения. (Частичный балл за этот пункт можно получить за вывод из соображений размерности).

2. Среди решений этого уравнения найдем такие, которые описывают гармонические колебания всех участков резинки с одинаковой частотой ω и начальной фазой ϕ :

$$y(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \phi).$$
 (2)

Какой вид должна иметь функция $A(x)$, чтобы $y(x, t)$ удовлетворяла уравнению (1)? Какие из найденных вами решений описывают колебания резинки с жестко закрепленными на расстоянии L краями?

3. Зарисуйте качественный вид функции $A(x)$ для нескольких (не менее четырех) различных типов решений.

Найденные вами типы решений, каждое из которых описывает колебания с частотой и фазой ϕ , одинаковые для разных частей резинки, называют нормальными колебаниями. Можно показать, что в условиях, при которых колебания резинки описываются уравнением (1), любое ее движение можно представить как сумму нормальных колебаний с некоторыми амплитудами, определяемыми только исходя из начальных

условий (т.е. способа, которым были возбуждены колебания в исходно покоящейся резинке).

Часть 2. Измерения

4. Соберите установку, как показано на рисунке ниже, закрепив концы резинки на лапках штатива.

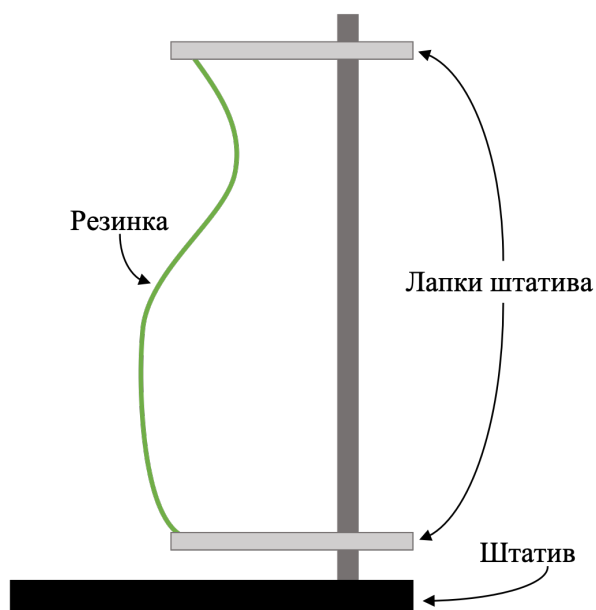


Рис. 2. Схема установки

Если теперь оттянуть резинку в сторону, держа ее за середину, дальнейшее ее движение будет описываться суммой нормальных колебаний, в которой основной вклад будет вносить только одно из них, поэтому можно считать, что дальнейшее движение резинки является нормальным колебанием. Запишите (или зарисуйте) в решении, какое именно нормальное колебание является основным.

5. Используя выданное оборудование, проведите измерения зависимости частоты колебаний резинки ν от отношения L/L_0 ее длины к длине недеформированной резинки и постройте график зависимости силы натяжения резинки T от L/L_0 . Определите диапазон удлинений, в котором эта зависимость является линейной, и вычислите коэффициент жесткости k в этом диапазоне.
6. Используя выданное оборудование, измерьте коэффициент трения μ резинки о боковую поверхность трубки, считая, что он не зависит от силы натяжения.

Указания.

1. Для включения стробоскопа в течение 2–3 с удерживайте нажатой кнопку «READ».
2. Для увеличения частоты нажмите кнопку «UP», для уменьшения — «DOWN». Если вам нужно значительно поменять частоту, зажимайте вышеуказанные кнопки для быстрого изменения частоты.
3. В используемом в задаче диапазоне частот при однократном нажатии на кнопки «UP», «DOWN» частота изменяется на 10 *RPM* (от англ. «колебаний в минуту»). Для более точных измерений нажмите на кнопку «FINE ADJUST», это переключит стробоскоп в режим точной настройки. Для выхода из этого режима еще раз нажмите «FINE ADJUST».

Оборудование.

Штатив с двумя лапками и тремя муфтами, резинка известной линейной плотности 3.80 г/м, трубка, стробоскоп, кусок мела для нанесения пометок на резинку, линейка 50 см.

Решение**Часть 1. Теоретическое введение**

1. Малость отклонения по сравнению с длиной резинки позволяет считать угол между участком резинки и Ox малым. Если, к тому же, она натянута достаточно сильно, чтобы пренебречь изменением натяжения из-за увеличения длины, а также силой тяжести, второй закон Ньютона в проекции на Oy для маленького участка резинки с координатами $(x, y(t))$ и длиной dx имеет следующий вид:

$$dm\ddot{y} = T(\sin(\alpha(x + dx)) - \sin(\alpha(x))) \approx T(y'(x + dx) - y'(x)) \approx Ty''dx, \quad (3)$$

откуда получаем волновое уравнение:

$$\ddot{y} = \frac{T}{\rho(L)}y''. \quad (4)$$

Здесь $\rho = dm/dx$ — линейная плотность резинки. Из этого уравнения заключаем $v = \sqrt{T/\rho(L)}$.

2. Подстановка (2) в (1) приводит к следующему уравнению:

$$A'' + \frac{\omega^2}{v^2}A = 0. \quad (5)$$

Это уравнение колебаний (с тем отличием, что вместо времени здесь координата), решения которого можно записать в виде:

$$A(x) = A_0 \sin\left(\frac{\omega}{v}x + \psi\right). \quad (6)$$

Для того, чтобы это решение описывало резинку, закрепленную на концах, нам нужно потребовать $y(x = 0, t) = y(x = L, t) = 0$:

$$\begin{cases} \sin(\psi) = 0, \\ \sin\left(\frac{\omega}{v}L + \psi\right) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

откуда следует условие $\omega = \frac{\pi v}{L}n = \omega_0 n$, где n — произвольное натуральное число.

3. Решение, соответствующее номеру n , имеет форму синусоиды с $n-1$ нулем на отрезке $(0; L)$ (см. первые четыре решения на рисунке 3).

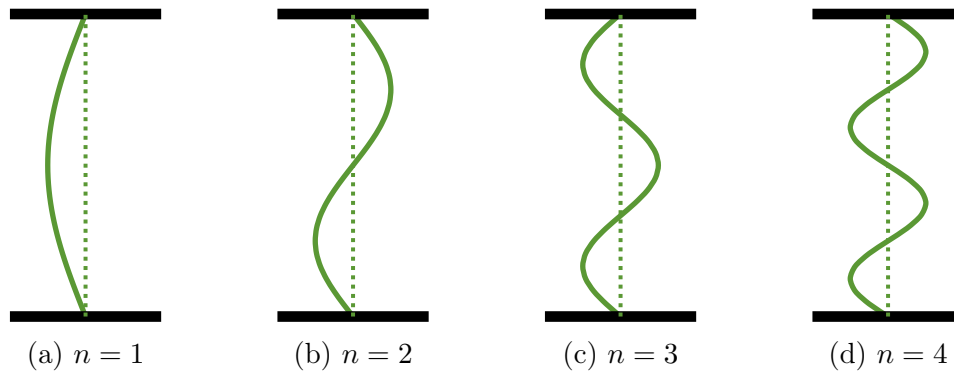


Рис. 3. Решения с разными частотами.

Часть 2. Измерения

1. Возбуждаемое описанным в условии способом колебание наиболее близко к синусоиде с $n = 1$, которая и будет вносить основной вклад в сумму нормальных колебаний, описывающих движение резинки. Отклонение начального профиля резинки от синусоиды описывается слагаемыми с $n > 1$.
2. Закрепим участок резинки, имеющий длину $L_0 = (18.9 \pm 0.1)$ см, указанным в условии способом, растянув до некоторой длины L . Используя стробоскоп, измерим зависимость частоты колебаний ν от длины L , которую мы можем менять, изменяя положение лапок на оси штатива.

Далее, пользуясь тем, что возбуждаемые колебания — нормальные с $n = 1$, получим формулу:

$$\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho(L)}} = \omega = 2\pi\nu. \quad (8)$$

Поскольку при изменении положения лапок неизменной остается не плотность резинки, а полная масса ее отрезка, приведем эту формулу к виду:

$$T = \rho_0 L_0 (2\nu)^2 L. \quad (9)$$

Обсудим несколько подробнее процедуру измерения частоты колебаний стробоскопом. Идея состоит в том, чтобы подобрать такую частоту, при которой можно наблюдать в свете стробоскопа стационарное изображение. Однако, если мы наблюдаем стационарную картинку на частоте ν' , то ее же мы будем видеть на частотах стробоскопа ν'/n , где n – натуральное число. Яркость стационарного изображения в свете стробоскопа, конечно, будет падать с ростом n , однако это тяжело зафиксировать визуально. Поэтому, чтобы точно определить нужную частоту, будем действовать следующим образом. Найдем частоту ν' , при которой мы будем видеть два изображения колеблющейся резинки, расстояние между которыми уменьшается по мере

затухания колебаний (см. рисунок 4, а). Если при уменьшении частоты в два раза мы наблюдаем не две резинки, а уже одну (медленно движущуюся из крайнего положения в положение равновесия (см. рисунок 4, б), то частота колебаний резинки равна $\nu'/2$. Ясно, что при достаточно маленьком шаге измерений такую проверку достаточно проделать для одной длины, поскольку изменение частоты для двух разных длин будет много меньше самого значения частоты.

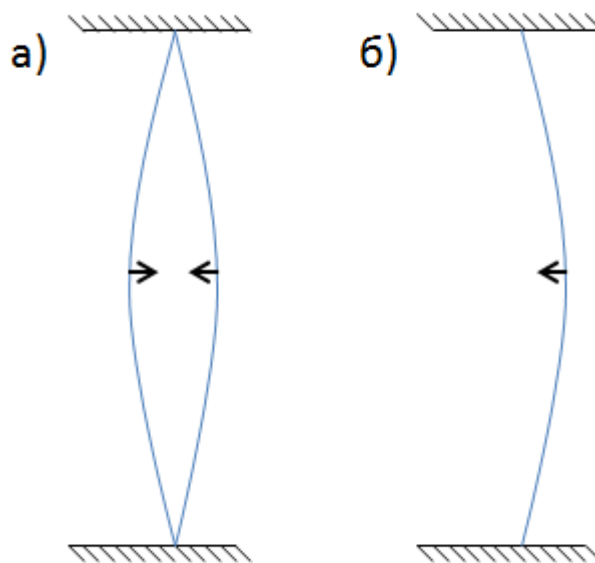


Рис. 4. Изображение в свете стробоскопа: а) частота колебаний в два раза меньше частоты стробоскопа; б) частоты совпадают.

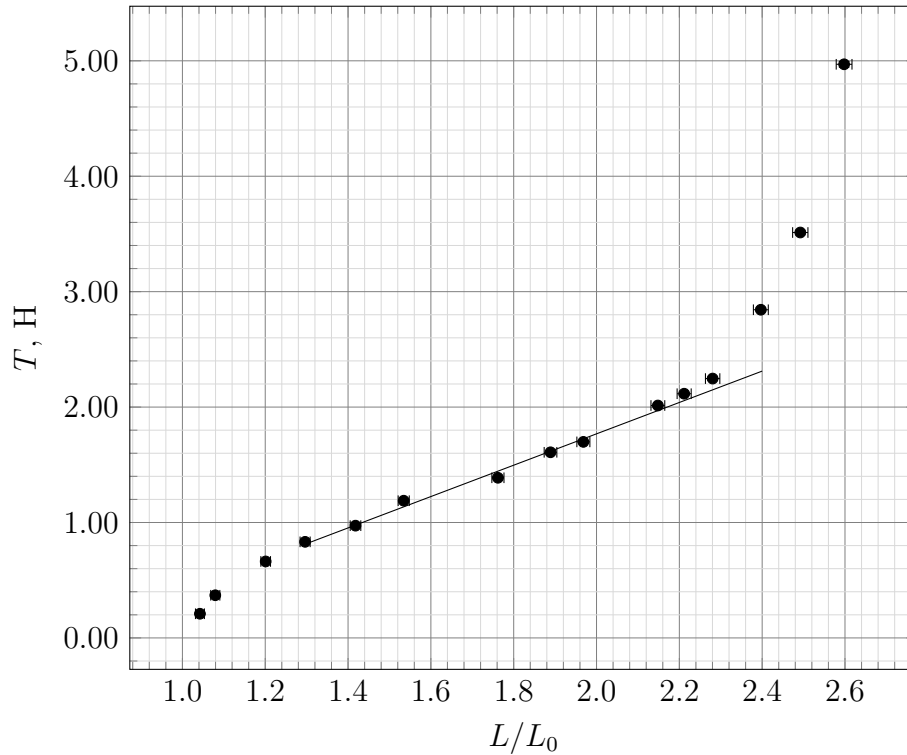
По нескольким причинам удобнее проводить измерения не самой частоты ν' , а ее удвоенного значения. Во-первых, это позволяет измерять маленькие частоты колебаний (на частотах ниже 30-40 Гц время реакции глаза на изменяющуюся освещенность оказывается сравнимым с временем между вспышками стробоскопа, и видны уже отдельные вспышки, а не "усредненная" стационарная картинка; при измерениях на удвоенной частоте можно дойти до вдвое меньших частот колебаний резинки). Во-вторых, при измерениях на удвоенной частоте существенно лучше удается ограничить диапазон частот, в котором изображение является стационарным (меняющимся только на масштабах характерного времени затухания колебаний), то есть погрешность определения частоты падает. Для оценки погрешности будем изменять частоту с маленьким шагом около $2\nu'$ и определим диапазон частот, в котором в свете стробоскопа наблюдаются два изображения резинки, медленно приближающиеся друг к другу. Границами диапазона будут частоты, на которых после совмещения изображения резинки снова расходятся.

Проведем измерения и расчеты, позволяющие найти зависимость $T(L/L_0)$. Погрешность измерения длин примем за $\delta L = 1$ мм. Для всех частот оценим погрешность измерения сверху как $\delta\nu = 10$ мин⁻¹.

L , см	L/L_0	$\Delta L/L_0$	2ν , мин ⁻¹	T , Н	δT , Н
19.70	1.04	0.01	2308	0.21	0.0029
20.40	1.08	0.01	3014	0.37	0.0043
22.70	1.20	0.01	3825	0.66	0.0064
24.50	1.30	0.01	4127	0.83	0.0074
26.80	1.42	0.01	4265	0.97	0.0082
29.00	1.53	0.01	4533	1.19	0.0093
33.30	1.76	0.01	4570	1.39	0.0102
35.70	1.89	0.02	4752	1.61	0.0113
37.20	1.97	0.02	4784	1.70	0.0117
40.60	2.15	0.02	4986	2.01	0.0130
41.80	2.21	0.02	5037	2.12	0.0135
43.10	2.28	0.02	5112	2.25	0.0140
45.30	2.40	0.02	5609	2.84	0.0164
47.10	2.49	0.02	6114	3.51	0.0189
49.10	2.60	0.02	7123	4.97	0.0241

Погрешность определения силы натяжения оценена как $\delta F = (2\delta(2\nu)/(\nu) + \delta L/L) F$.

Построим график зависимости $T(L/L_0)$:



Видно, что имеется довольно широкая область линейности функции $T(L/L_0)$, где резинку можно описывать жесткостью $k = (7.3 \pm 0.2) \text{ Н/м}$.

3. Теперь зафиксируем положение концов резинки и в третью муфту вставим трубку, вокруг которой обмотаем резинку в один оборот, как показано на рисунке 5. Будем оттягивать трубку вниз так, чтобы резинка скользила по ней. Зафиксируем трубку в некотором положении. По формуле Эйлера отношение сил натяжения резинки сверху и снизу дается формулой (знак $+$ в показателе экспоненты соответствует движению трубки вниз перед тем как мы ее закрепили):

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{2\pi\mu}. \quad (10)$$

Здесь μ — искомый коэффициент трения.

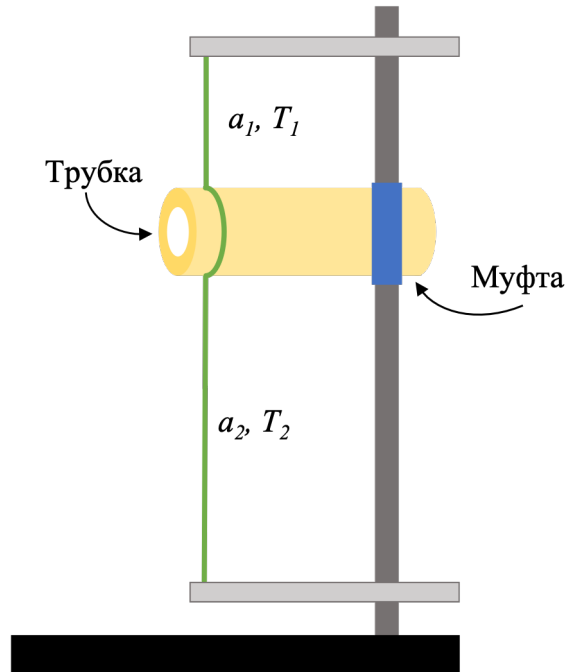


Рис. 5. Схема установки для измерения коэффициента трения.

Теперь, не меняя положений концов резинки и трубки, измерим частоты колебаний ν_1 и ν_2 верхней и нижней частей резинки способом, аналогичным описанному выше для измерения зависимости $T(L)$. Измерим длины a_1 и a_2 этих участков резинки и сделаем пометки в точках соприкосновения резинки с трубкой. После измерения частоты трубку нужно аккуратно извлечь и по сделанным пометкам измерить длины a_1^0 и a_2^0 верхнего и нижнего участков резинки. Тогда, исходя из выражения для нормальной частоты колебания с $n = 1$, можно записать:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{T_1 \rho_2 a_2}{T_2 \rho_1 a_1}} = \sqrt{\frac{T_1 a_2^0 a_1 a_2}{T_2 a_1^0 a_2 a_1}} = \sqrt{\frac{T_1 a_2^0 a_2}{T_2 a_1^0 a_1}}. \quad (11)$$

Здесь мы воспользовались тем, что в отсутствие трубки линейная плотность резинки одинакова по всей длине.

Записанные выражения позволяют провести линеаризацию:

$$y = (\nu_1/\nu_2)^2 = e^{\pi\mu} \frac{a_2^0 a_2}{a_1^0 a_1} = e^{\pi\mu} x. \quad (12)$$

По измеренным значениям $T_{1(2)}$, $a_{1(2)}$ и $a_{1(2)}^0$ для разных положений трубки определим μ .

Результаты измерений:

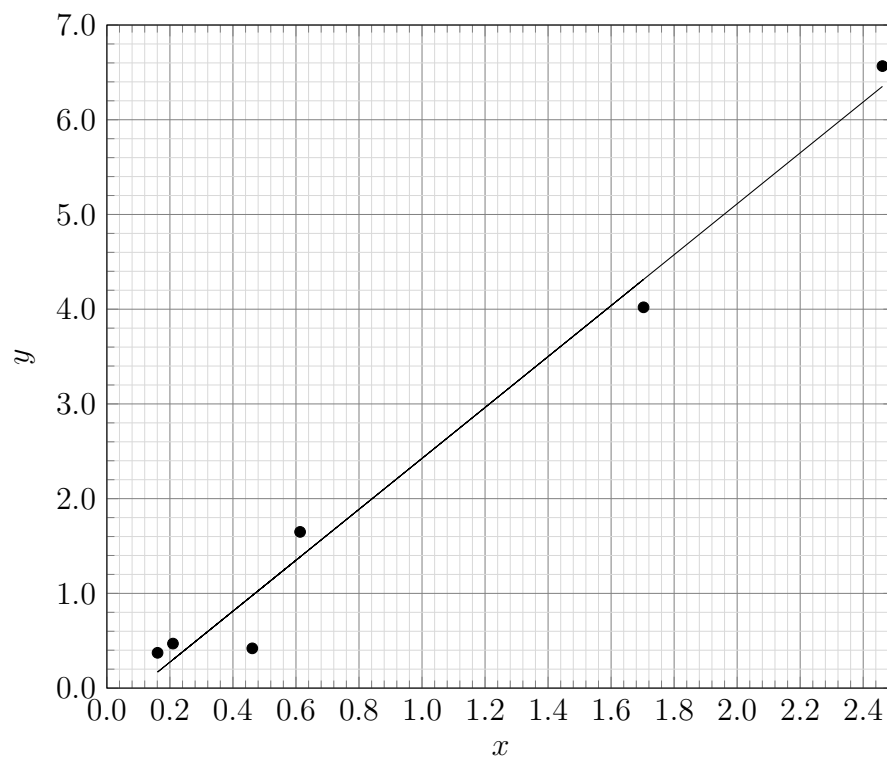
a_1 , см	a_2 , см	a_1^0 , см	a_2^0 , см	$2\nu_1$, мин ⁻¹	$2\nu_2$, мин ⁻¹
24.5	29.6	16.2	33.0	11480	4480
41.6	12.4	30.4	16.4	5145	8430
29.2	17.3	20.1	20.8	9220	7180
34.2	12.5	25.8	14.8	6690	9760
24.8	28.5	19.3	28.6	12110	6040
27.7	18.8	25.3	17.2	6135	9470

Расчет величин y и x дает:

x	y
2.5	6.566
0.2	0.372
0.6	1.649
0.2	0.470
1.7	4.020
0.5	0.420

График зависимости $y(x)$:

Рис. 6. График зависимости $y(x)$.



Измерения проводились для разных положений трубки и при разных натяжениях. Угловой коэффициент прямой, описывающей эту зависимость, $k = 2.70$ дает $\mu = \ln(k)/\pi = 0.32$.